απαλοιφή του Gauss με **φυσική οδήγηση.**

Παράδειγμα 6.2

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -2$$

με τη μέθοδο του Gauss με φυσική οδήγηση.

Λύση

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή της μεθόδου έχουμε

1^o βήμα

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad L_1 b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2^o βήμα

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad L_2 L_1 b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Άρα το ισοδύναμο με το αρχικό γραμμικό σύστημα, που θέλουμε να επιλύσουμε, είναι το

$$L_2 L_1 A = L_2 L_1 b$$

ή ισοδύναμα το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_2 - x_3 &= 1 \\
-4x_3 &= -4,
\end{aligned}
$$

οπότε, με προς τα πίσω αντικατάσταση, έχουμε

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 2 \ \text{και} \ x_1 = 1.$$

Παράδειγμα 6.3

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα του παραδείγματος 6.2.

με LU – ανάλυση.

Λύση

Από τη λύση του παραδείγματος της παραγράφου 6.2.

έχουμε

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εξάλλου, σύμφωνα με την θεωρία μας, ισχυει:

$$A = LU$$

είναι η LU – ανάλυση του πίνακα A από την απαλοιφή του Gauss με φυσική οδήγηση, έχουμε

$$L = (L_2 L_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(*) ο πινακας L είναι κατω τριγωνικος και προκυπτει απο τη διαδικασια Gauss με φυσικη οδηγηση, ενώ κατω απο τη διαγωνιο περιεχει τους πολλαπλασιαστες $m_{ij} = l_{ij}$. Οπου:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

(**) Ο πινακας U είναι άνω τριγωνικος και είναι το τελικο προϊον της τριγωνοποιησης του πινακα A.

Έτσι, έχουμε για λύση τα γραμμικά συστήματα $Ly = b$ και $Ux = y$, όπου L και U δίνονται από τις παραπάνω σχέσεις, η λύση των οποίων θα μας απαντήσει στο πρόβλημά μας.

Από το πρώτο σύστημα $(Ly = b)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

με προς τα εμπρός αντικατάσταση έχουμε

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 1 \text{ και } y_3 = -4,$$

ενώ από το δεύτερο σύστημα $(Ux = y)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 2 \text{ και } x_1 = 1,$$

δηλαδή το ζητούμενο.